Erros e Incertezas

Rafael Alves Batista
Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual de Campinas
(Dated: 10 de Julho de 2011.)

I. INTRODUÇÃO

Quando se faz um experimento, deseja-se comparar o resultado obtido com outros resultados. Por isto é importante conhecer as possíveis fontes de erros associadas ao experimento. Neste contexto, a palavra 'erro' não indica que algo ocorreu de forma errônea na execução de um experimento, e sim que os instrumentos utilizados e as condições sob as quais o experimento foi realizado não permitem que o resulado seja obtido com precisão e exatidão infinitas.

Uma medida experimental determina o valor de uma determinada grandeza física. Este valor, que corresponde ao resultado obtido após o tratamento dos dados de uma experimento, deve indicar as fontes de incertezas. Estas incertezas podem ser devido à quantidade de vezes que o experimento foi realizado, aos instrumentos utilizados e outros fatores.

Erro e incerteza frequentemente são usados como sinônimos na literatura[1]. Porém, uma distinção pode ser feita entre eles. O erro é a diferença entre o valor medido e o valor aceito, segundo experimentos anteriores, ou esperado teoricamente. Isto pode soar contraditório, uma vez que o objetivo de um experimento científico é realizar uma nova medida e novas medidas não têm parâmetros de comparação. Portanto, a utilização do termo 'erro' só tem sentido quando comparada a outros resultados de experimentos. Em uma aula de laboratório, os experimentos já foram realizados inúmeras vezes e existem resultados bem estabelecidos para as grandezas medidas, que podem ser utilizados para fins de comparação. Portanto, neste caso o uso do termo 'erro' é cabível.

A incerteza de uma medida é o intervalo de confiança ao redor de um valor medido tal que se o experimento for repetido nas mesmas condições, uma determinada fração das medidas estarão neste intervalo. O caso mais comum em medidas de laboratório é o de uma distribuição gaussiana, tal que a média desta distribuição indica o valor medido e o desvio padrão (incerteza) indica que em caso de repetição do experimento, cerca de 68% das medidas estarão neste intervalo.

II. EXATIDÃO E PRECISÃO

Dois conceitos distintos que são frequentemente confundidos são precisão e exatidão. A precisão está associada à repetibilidade de um experimento. Se um mesmo experimento for realizado diversas vezes sob as mesmas condições, a medida será precisa se em cada uma das realizações do experimento o resultado obtido for bem próximo aos das demais realizações. A exatidão de um experimento, por sua vez, está associada à proximidade entre o valor medido e um valor de referência, conforme ilustrado na figura 1.

A curva apresentada na figura 1 (curva preta) é chamada de gaussiana e corresponde à distribuição esperada para as medidas experimentais, em caso de muitas repetições. Esta curva pode ser matematicamente expressa por:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}, \right) \tag{1}$$

onde $\bar{x}$ é o valor médio, e σ é o desvio padrão, associado à largura da curva.

Para clareza, considere um arqueiro, um alvo e algumas flechas. A figura 2 (à esquerda) é um exemplo de precisão sem exatidão, onde o arqueiro acerta as flechas todas próximas umas das outras, mas longe do centro do alvo. No caso de uma medida experimental, ao se falar de precisão não importa se o valor obtido for totalmente diferente de um dado valor de referência, importa apenas o quão próximas estão as diversas medidas realizadas. Na 2 (à direita) é apresentado um exemplo em que o arqueiro foi exato, porém impreciso. Ele jogou diversas flechas, e apesar de suas flechas atingirem regiões mais próximas ao centro do alvo, o arqueiro não conseguiu atingir o mesmo ponto do alvo nos diversos disparos. Na figura 3 (à esquerda) é mostrado o resultado de um arqueiro impreciso e inexato: não consegue atingir várias flechas próximo da região centro do alvo e cada disparo atinge em um ponto diferente. Por fim, na figura 3 (à direita) é apresentado o resultado de disparos de um arqueiro profissional, que consegue atingir em todos os disparos aproximadamente o mesmo ponto, e que sempre acerta o centro do alvo.

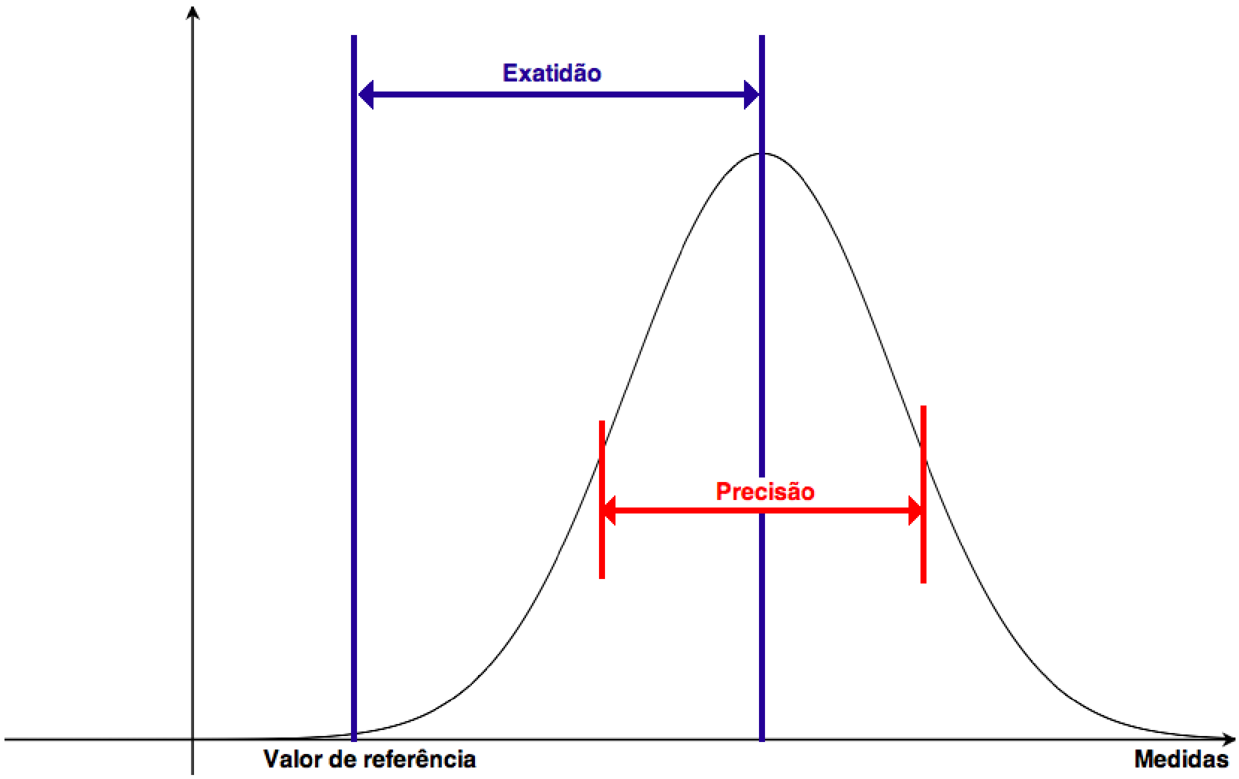

Figura 1: Gráfico que ilustra os conceitos de exatidão (proximidade da medida em relação a uma medida de referência), e precisão (repetibilidade do experimento).

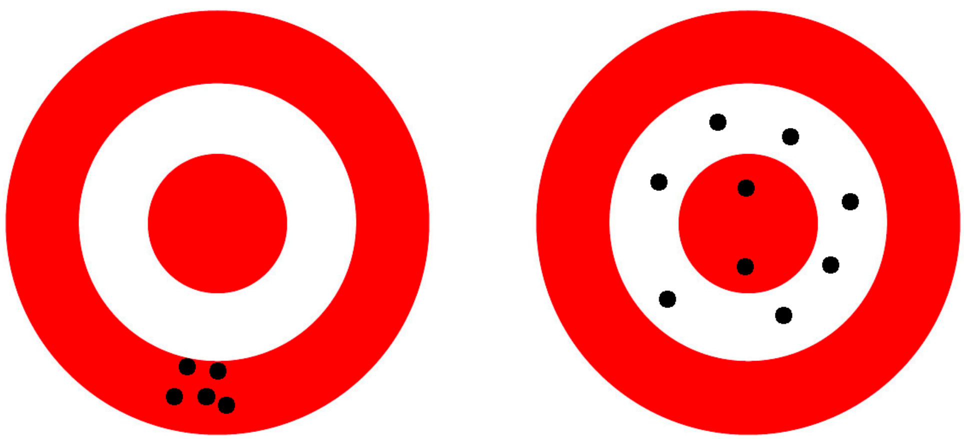

Figura 2: À esquerda é mostrado um exemplo de um alvo atingido por flechas de um arqueiro preciso e inexato. À direita é ilustrado um exemplo de um alvo atingido por disparos de um arqueiro exato e impreciso.

III. TIPOS DE ERROS

A incerteza estatística, também conhecida como incerteza aleatória, causa uma inconsistência no valor da medida quando o experimento é realizado diversas vezes. Este tipo de incerteza causa uma dispersão em torno do valor médio das medidas. Se o valor médio destas incertezas é nulo, quanto mais medidas se efetua, menor o seu erro estatistíco.

O erro sistemático, por sua vez, é causado por efeito dos equipamentos e métodos utilizados na medição. Por exemplo, um experimento para medir a dilatação térmica de uma barra de metal é sensível a mudanças de temperatura do ambiente. Outro exemplo recorrente é o fato de a resistência do ar ser negligenciada em muitos experimentos, o que pode causar sistematicamente um erro toda vez que o experimento é realizado. A dificuldade de se verificar erros sistemáticos é maior que a de incertezas estatísticas, pois não podem ser eliminadas por reptição. É importante sempre pensar em todas as possíveis fontes de erro durante

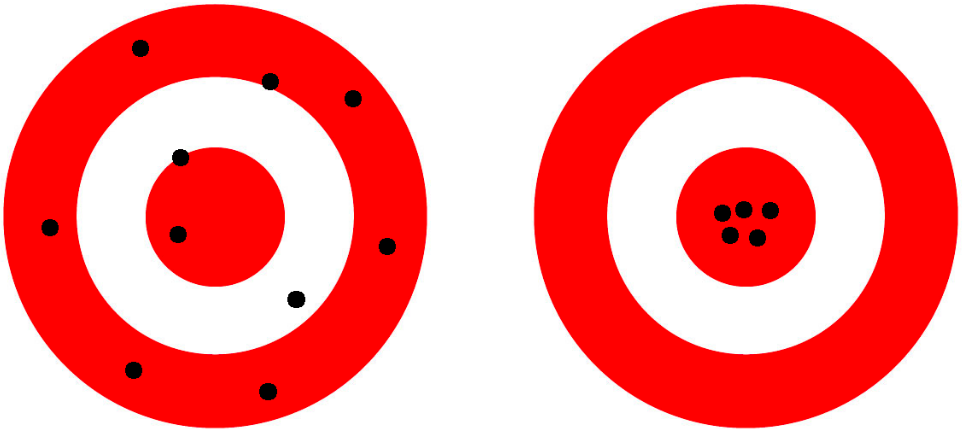

Figura 3: À esquerda é mostrado um exemplo de um alvo atingido por flechas de alguém que desconhece totalmente os princípios da arqueria (impreciso e inexato). À direita é ilustrado o resultado de disparos de um arqueiro profissional, onde cada disparo é preciso e exato.

a realização de experimentos, para evitar complicações futuras e para uma discussão mais detalhada dos resultados.

A figura 4 mostra graficamente como cada um destes tipos de erro afetam o resultado obtido experimentalmente. No lado esquerdo desta figura é mostrada uma incerteza estatística, que implica em uma dispersão em torno do valor real da grandeza física medida. No gráfico mostrado do lado direito desta figura, nota-se que o erro sistemático causa um afastamento da medida em relação ao valor real, e isto não se manifesta quando o experimento é repetido várias vezes.

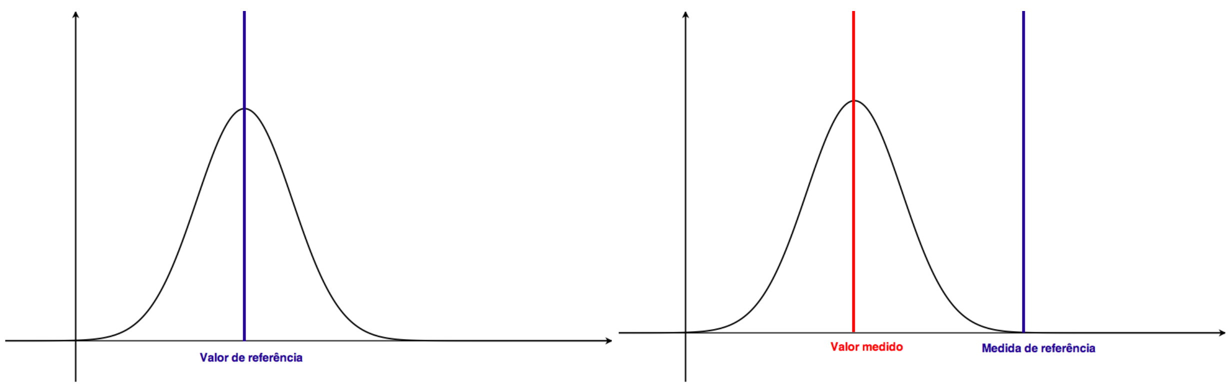

Figura 4: Manifestação de um erro sistemático em uma medida (à esquerda) e de uma incerteza estatística (à direita). A curva (linha escura) representa o conjunto de dados experimentalmente obtidos.

IV. ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES

A. Erro Percentual

O erro percentual (P_e) entre o valor medido em seu experimento(x_m) e um valor de referência (x_r) é dado por

$$P_e = \frac{x_m - x_r}{x_r} \times 100\%. \tag{2}$$

B. Diferença Percentual

A diferença percentual (P_d) entre dois valores medidos em seu experimento (x_1 e x_2) é:

$$P_e = \frac{|x_1 - x_2|}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} \times 100\%. \tag{3}$$

C. Média

A média aritmética ($\bar{x}$) de um conjunto de medidas $\{x_i\}$, com i=1,2,...,N, onde N é o número de medidas realizadas, é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{4}$$

D. Desvio padrão

O desvio padrão (σ) de um conjunto de medidas $\{x_i\}$, com i=1,2,...,N, onde N é o número de medidas realizadas, é dada por

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{5}$$

V. INCERTEZA DA MÉDIA

A incerteza da média (σ_m) está relacionada ao desvio padrão (σ) através do número total de medidas N da seguinte forma:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

VI. TRATAMENTO DE ERROS E INCERTEZAS

Nem todas as grandezas físicas podem ser medidas diretamente. São necessárias medidas de outras grandezas e através da relação entre estas obtem-se a medida da grandeza desejada. Para cada grandeza medida existe um erro associado, e este é propagado até a grandeza final. Por isto, um tratamento matemático que relacione os erros das diversas medidas intermediárias com o erro da medida final.

Para uma função de N variáveis ($f = f(x_1, x_2, ..., x_N)$), o erro Δf pode ser calculado em termos dos erros (Δx_i) das grandezas individuais, da seguinte forma:

$$(\Delta f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta x_2)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 (\Delta x_N)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2. \tag{7}$$

Suponha, por exemplo, um conjunto de cem medidas de distância (s) percorrida por um objeto com média $23,4$ m e erro $0,6$ m. Suponha que para cada uma destas medidas de distância, uma medida de tempo (t) foi obtida com um cronômetro, de forma que o valor médio deste intervalo de tempo seja $6,04$ s com erro $0,02$ s. Então, a velocidade média deste objeto, expressa por $v_{med} = s/t$ com seu respectivo erro pode ser calculada da seguinte forma:

$$(\Delta v)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 (\Delta t)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 (\Delta s)^2, \tag{8}$$

onde Δs é o erro da medida da distância e Δt é o erro associado à medida do tempo. Calculando as derivadas parciais da velocidade com relação ao tempo e ao espaço, obtem-se que:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-s}{t^2}.$$

Portanto:

$$(\Delta v)^2 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 (\Delta s)^2 + \left(\frac{-s}{t^2}\right)^2 (\Delta t)^2. \tag{9}$$

Substituindo os valores da distância ($23,4 \pm 0,6\ m$) e do tempo ($6,04 \pm 0,02\ s$), obtem-se:

$$(\Delta v)^2 = \left(\frac{1}{6,04}\right)^2 (0,6)^2 + \left(\frac{-23,4}{6,04^2}\right)(0,02)^2 = 0,00987 + 0.00026 = 0,0101.$$

Assim, o erro da velocidade é $\Delta v = 0,1\ m/s$, e esta pode ser escrita como $v = 3,9 \pm 0,1\ m/s$.

VII. ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Algarismos significativos são números que contribuem para a precisão de uma medida. Quando um número é expresso em notação científica, o número de algarismos significativos é o número de dígitos necessários para expressar o número dentro de uma determinada incerteza.

Números com três algarismos significativos seriam, por exemplo, 425, $10,2$ e $2,34$. Um caso que geralmente causa confusão é o do número $0,10$. Este número tem dois algarismos significativos (o 1 e o 0 à direita da vírgula). O zero à esquerda da vírgula não é significativo. Outro caso semelhante é o número 0,00030. Este número tem apenas dois algarismos significativos (os dois últimos dígitos, isto é, o 3 e o 0). Note que os zero à esquerda do 3 e os zeros antes da vírgula não são significativos.

Quando se realiza operações com números com diferentes quantidades de algarismos significativos, deve-se sempre expressar o resultado final com a mesma quantidade de algarismos significativos que o número com a menor quantidade destes. Um exemplo seria a soma $1,0334 + 20,23 + 10,6$. *A priori*, desconsiderando a noção de algarismos significativos, poder-se-ia pensar que o resultado desta soma é 31,8634. No entanto, o número $10,6$ tem uma incerteza de $\pm 0,1$, de modo que algarismos à direita da primeira casa decimal perdem o sentido, uma vez que a incerteza da primeira casa decimal é maior que os próprios dígitos. Por isto, esta soma deve ser escrita com apenas um algarismo significativo à direita da vírgula, isto é $31,9$.

Quando uma medida é realizada, pode-se calcular a incerteza associada. Se considerarmos uma régua, cuja menor divisão é da ordem de milímetros, não tem sentido considerar frações de milímetro, pois isto estaria além da capacidade de medição de uma simples régua comum. Ao se apresentar resultados de medidas, considera-se apenas um algarismo significativo para o erro e expressa-se a medida coerentemente com este erro. Isto significa que se o comprimento de um objeto é $11,2\ cm$ e o erro desta medida é $0,5\ cm$, então a medida deverá ser expressa como $11,2 \pm 0,5\ cm$. Se o erro desta mesma medida fosse $0,256\ cm$, então o resultado deveria ser expresso como $11,2 \pm 0,3\ cm$, onde o erro de $0,3\ cm$ é o resultado do arredondamento do erro anteriormente expresso.

---

[1] Neste texto, por simplicidade, o autor não faz distinção entre erro e incerteza.
[2] José Henrique Vuolo, Fundamentos da Teoria de Erros, Editora Edgard Blücher.